РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКА ОТ КОМБИНАТОРИКА И ВЕРОЯТНОСТИ

Задачите са от учебници за 10 клас, „Тестове за подготовка на зрелостен изпит” – изд. „Анубис”, „Текстови задачи за държавни зрелостни изпити” – изд. „Булвест 2000”, ”Матура за отличен” – изд. „Просвета”, давани задачи на Зрелостен изпит – 2008 г.

Задачите са събрани от Здравка Поплазарова и решени от Здравка Поплазарова и Мария Калоянова
Компютърна обработка – ученици от $10^{\text{б}}$ клас – Илия, Ина, Кристиян, Магдалена, Марина, Милослав, Моника, Недю, Никол, Теодора, Христо
с ръководител Мария Калоянова.
Редактори Здравка Поплазарова и Мария Калоянова

Декември 2008 година
София

- Пермутации $P_n = n!$
- Вариации $V_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
- Комбинации $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} = \dbinom{n}{k}$

P_n - Всички нареждания на $\underline{\underline{n}}$ елемента в $\underline{\underline{n}}$ - членни редици.

V_n^k - Всички $\underline{\underline{k}}$ -членни редици от $\underline{\underline{n}}$ елемента, различаващи се една от друга по елементите или по реда, в който са взети.

C_n^k - Всички $\underline{\underline{k}}$ -елементни подмножества на множеството от $\underline{\underline{n}}$ елемента, за които редът на елементите не е от значение.

Заб. Броят на комбинациите на *k* елемента от *n*-ти клас $\left(C_n^k\right)$ е равен на вариациите на *k* елемента от *n*–ти клас $\left(V_n^k\right)$, разделен на броя на повторенията на *k* елемента – пермутации $P_k = k!$. Под „повторения" се разбира $\underline{\underline{k}}$ -членни редици, съдържащи еднакви елементи, различаващи се по място.

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

- Вероятност $P = \dfrac{\textit{Брой благоприятни събития}}{\textit{Брой на всички събития}} \quad \rightarrow P \in [0;1]$

Вероятността да се случи благоприятно събитие е броят на благоприятните възможности /събития/, разделен на броя на всички възможности /събития/.

Вероятността да се случи благоприятно събитие$\left(P\right)$ + вероятността да се случи неблагоприятно събитие$\left(\overline{P}\right)$ е 1. $\rightarrow P + \overline{P} = 1$

1) ! Колко десетцифрени числа могат да се съставят,като всяка цифра се използва само веднъж?

Решение: Цифрите са 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – 10 цифри. На първо място имаме избор от 10 цифри, на второ – от 9, на трето – от 8, ... на второ място – избор от девето цифри и на десето – от 1, т.е. 10! възможности. Ако на първо място сложим 0, тогава на второ имаме избор от 9 цифри, на трето – от 8, на четвърто – от 7, ..., на десето – от 1 цифра, т.е. 9! възможности.

Число не може да започва с 0 $\Rightarrow$ 10! − 9! = 10.9! – 9! = (10–1).9! = 9.9! = 3265920

Друг начин за разсъждаване: на първо място имаме избор от 9 цифри /без 0/, за второ място остава избор отново от 9 цифри / 0 се връща като възможен избор, но една от цифрите вече сме сложили на първо място и я отстраняваме, защото не бива да повтаряме, така остават 9 възможности/, на трето място – избор от 8 цифри, на четвърто – избор от 7, ..., на девето – от 2, на десето – от 1 $\Rightarrow$ 9.9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 9.9! = 3265920.

2) По колко различни начина могат 7 книги да бъдат подредени на една полица?

Решение: 7! = 7.6.5.4.3.2.1 = 5040

3) ! Колко прави минават през 8 точки, никои три от които не лежат на една права?

Решение: (Две точки определят една права и няма значение коя е първа и коя е втора, т.е. редът на елементите не е от значение.) $C_8^2 = \dfrac{8!}{6!.2!} = \dfrac{6!.7.8}{6!.1.2} = \dfrac{7.8}{2} = 28$

4) Колко равнини минават през 7 точки, никои три от които не лежат на една права и никои 4 не лежат в една равнина?

Решение: (Три точки определят една равнина.) $C_7^3 = \dfrac{7!}{4!.3!} = \dfrac{4!.5.6.7}{4!.1.2.3} = 35$

5) ! Колко диагонала има правилен n-ъгълник?

Решение: (*Всички прави през две точки.*) $C_n^2 = \dfrac{n!}{(n-2)!2!} = \dfrac{(n-2)!(n-1)n}{(n-2)!.1.2} = \dfrac{(n-1)n}{2} \Rightarrow$

Изваждаме броя на страните $\Rightarrow$ $\dfrac{(n-1)n}{2} - n = \dfrac{n^2-n-2n}{2} = \dfrac{n^2-3n}{2}$ диагонала.

6) ! Колко фиша могат да се попълнят в играта „6 от 49” на Спортния тотализатор така, че във всеки да фиш да има точно три числа от 1 до 10?

Решение: Първите 3 числа измежду числата до 10 можем да изберем по C_{10}^3 начина. Като махнем числата от 1 до 10, до 49 остават 39 числа и измежду тях трябва да изберем другите 3 за фиша, а това межем да направим по C_{39}^3 начина. При всеки избор на първите 3 числа, можем по C_{39}^3 начина да изберем вторите, а за първите 3 имаме C_{10}^3 възможности. Следователно възможностите са

$$C_{10}^3.C_{39}^3 = \frac{10!}{7!.3!}.\frac{39!}{36!.3!} = \frac{7!.8.9.10}{7!.1.2.3}.\frac{36!.37.38.39}{36!.1.2.3} = \frac{8.9.10}{2.3}.\frac{37.38.39}{2.3} = 120.37.19.13 = 1096680$$

7) ! Конспект за матура има 20 въпроса и 25 задачи. Колко различни комбинации могат да се съставят, ако изпитен билет съдържа 2 билета и 3 задачи?

Решение: Възможните избори на 2 от 20 въпроса са C_{20}^2, а възможните комбинации на 3 от 25 задачи са C_{25}^3. Всеки избор на въпроси може да се съпостави с всеки избор на задачи.

$$\Rightarrow C_{20}^2.C_{25}^3 = \frac{20!}{18!.2!}.\frac{25!}{22!.3!} = \frac{18!.19.20}{18!.2}.\frac{22!.23.24.25}{22!.1.2.3} = 190.2300 = 437000$$

8) В играта „Бридж” се раздават по 13 карти на играч измежду 52 карти. По колко различни начина един играч може да получи 13 карти?

Решение: Редът на елементите няма значение, тук – в какъв ред се раздават картите. Избираме 13 от 52 карти по C_{52}^{13} начина. $\Rightarrow C_{52}^{13}=\frac{52!}{39!.13!}=\frac{39!40.41.42.43.44.45.46.47.48.49.50.51.52}{39!1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13}=$

$$=\frac{41.42.43.4.45.46.47.48.49.5.51}{2.3.6.7.9.12}=\frac{41.43.4.45.46.47.4.49.5.51}{6.9}=$$

$$\frac{41.43.4.15.23.47.4.49.5.17}{3}=38116060.49.20.17=38116060.16660=635013559600$$

9) Колко петцифрени числа могат да се образуват от цифрите 0, 1, 2, 3, 4 взети по веднъж?
Решение: От 5 цифри $\rightarrow P_5=5!=1.2.3.4.5=120$ числа.
Числата не могат да започват с 0 $\Rightarrow P_5-P_4=5!-4!=120-24=96$

10) ! По колко начина могат да бъдат разпределени в един ден 9 учебни предмета, ако в дневната програма се включват 5 различни учебни предмета?
Решение: $V_9^5=\frac{9!}{(9-5)!}=\frac{4!.5.6.7.8.9}{4!}=30.56.9=15120$, защото редът на предметите има значение.

11) Колко са четирицифрените числа, които съдържат цифрите 1, 2, 3 и 4 точно по един път?
Решение: $P_4=1.2.3.4=24$, $P_4=4!$

12) Колко са четирицифрените числа, в които се срещат само цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и никоя цифра не се повтаря?
Решение: Избираме 4 от 7 цифри и има значение коя на кое място е.
$\Rightarrow V_7^4=\frac{7!}{3!}=\frac{3!.4.5.6.7}{3!}=4.5.6.7=840$

13) Тото играчите попълват 6 от 49. Колко различни фиша могат да се попълнят?
Решение: $C_{49}^6=\frac{49!}{43!.6!}=\frac{43!.44.45.46.47.48.49}{43!.1.2.3.4.5.6}=\frac{44.45.46.47.49}{15}=13983816$

14) Колко е броят на четирицифрените числа, в които се срещат само цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5 и никоя от тях не се повтаря?
Решение: $V_6^4-V_5^3=\frac{6!}{2!}-\frac{5!}{2!}=\frac{5!.6-5!}{2}=\frac{5!.(6-1)}{2}=\frac{1.\cancel{2}.3.4.5.5}{\cancel{2}}=300$
С '0' не може да започва число, а броят на 0*** е V_5^3.

15) Колко прави линии могат да се построят през 8 точки, никои от три които не лежат на една права?
Решение: $C_8^2=\frac{8!}{6!.2!}=\frac{6!.7.8}{6!.2}=\frac{56}{2}=28$

16) ! По колко различни начина могат да се подредят 5 различни книги в една редица на библиотеката?
Решение: 5 книги, за всички има място $\rightarrow P_5=5!=1.2.3.4.5=120$

17) По колко различни начина могат да седнат 6 ученика на една пейка?
Решение: $P_6=6!=1.2.3.4.5.6=720$

18) ! По колко различни начина могат да се подредят 5 души в един кръг?
Решение: $P_4=4!=1.2.3.4=24$ – един от тях може да застане където иска и според него другите ще се подреждат.

19) ! По колко различни начина могат да седнат на една пейка 5 ученика, ако двама от тях не искат да се разделят и трябва да са един до друг?

Решение: Двамата броим за един $\to P_4$, но те могат да си разменят местата $\to 2.P_4 = 2.4! = 2.1.2.3.4 = 48$

20) ! Колко трицифрени числа могат да се съставят от цифрите 1, 3, 4, 6?

Решение: Тук допускаме повтаряне на цифрите. На 1во място имаме избор от 4 цифри, на второ – пак от 4, на трето – също. Тогава всички възможности са 4.4.4 = 64.

21) Дадени са 7 различни по цвят ленти. Колко различни трицветни знамена могат да се ушият от тях?

Решение: $V_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{4!.5.6.7}{4!} = 5.6.7 = 210$

22) От една група от 15 спортиста трябва да се изберат 4 участника за щафета 800+400+200+100. По колко начина може да стане това?

Решение: Трябва да изберем 4-ма от 15, като има значение мястото – на кой по ред пост ще бяга спортистът, защото дистанциите са различни.

$\Rightarrow V_{10}^4 = \frac{15!}{(15-4)!} = \frac{11!.12.13.14.15}{11!} = 12.13.14.15 = 32760$

23) Колко четирицифрени числа могат да се напишат с цифрите 2, 0, 5, 8, 9 взети по един път?

Решение: 5 цифри на 4 места $\to V_5^4 - V_4^3 = \frac{5!}{(5-4)!} - \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{1.2.3.4.5}{1!} - \frac{1.2.3.4}{1!} = 120 - 24 = 96$

24) По колко различни начина могат да се изберат трима дежурни от група от 20 души?

Решение: $C_{20}^3 = \frac{20!}{17!.3!} = \frac{17!.18.19.20}{17!.1.2.3} = \frac{18.19.20}{6} = 1140$

25) Дадени са 'n' точки в равнината, като никои три от тях не лежат на една права. Намерете броя на правите, които се получават като се съединяват всеки две от точките.

Решение: $C_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!.2!} = \frac{(n-2)!.(n-1)n}{(n-2)!.1.2} = \frac{(n-1)n}{2}$

26) Шампионатът по футбол, в който участват 16 отбора, се провежда така че всеки отбор се среща два пъти с всеки друг отбор. Колко е броят на срещите, които се провеждат?

Решение: $2.C_{16}^2 = 2.\frac{16!}{(16-2)!.2!} = \frac{14!.15.16}{14!.2!} = 15.8 = 120$ – комбинираме ги по 2 отбора по C_{16}^2 начина и всяка двойка играе по два мача.

Или: V_{16}^2, защото в двойките има значение домакин-гост.

27) ! Събрание от 80 човека трябва да избере председател, секретар и трима членове на комисия. По колко начина може да стане това?

Решение: От 80 души избираме двама за председател и секретар – вариации, защото мястото има значение; от останалите 78 души избираме трима членове с комбинации, защото са равнопоставени и мястото няма значение.

$V_{80}^2.C_{78}^3 = \frac{80!}{78!}.\frac{78!}{75!.3!} = \frac{78!.79.80}{78!}.\frac{75!.76.77.78}{75!.1.2.3} = 79.80.\frac{76.77.78}{6} = 79.80.76.77.13 = 36984640.13$

Същото се получава, ако първо изберем трима членове от 80 души, а после двама за председател и секретар от останалите 77

$\to C_{80}^3.V_{77}^2 = \frac{80!}{77!.3!}.\frac{77!}{75!} = \frac{\cancel{77!}.78.79.80}{\cancel{77!}.1.2.3}.\frac{\cancel{75!}.76.77}{\cancel{75!}} = \frac{78.79.80}{6}.76.77 = 13.79.80.76.77 = 36984640.13$

Или $2C_{80}^2.C_{78}^3$ – избираме двама за председател и секретар по C_{80}^2 начина /така мястото им няма значение/, но те могат да разпределят длъжностите си по 2 начина $\Rightarrow 2.C_{80}^2$, тримата членове избираме от останалите 78 по C_{78}^3 начина, като при тях мястото няма значение.

Или $80.79.C_{78}^{3}$ – на първо място 80 възможни, на второ – 79, остават C_{78}^{3} за избор на членовете.

28) По колко различни начина може да се образува разузнавателна група от трима офицери и седем войника, ако има всичко 10 офицера и 20 войника?

Решение: $C_{10}^{3}.C_{20}^{7}=\frac{10!}{7!.3!}.\frac{20!}{13!.7!}=\frac{7!.8.9.10}{7!.1.2.3}.\frac{13!.14.15.16.17.18.19.20}{13!.1.2.3.4.5.6.7}=120.\frac{16.17.18.19.20}{4.6}=$
$=120.77520=9302400$

29) ! Тридесет души трябва да се разделят на три групи по 10 човека. По колко различни начина може да стане това?

Решение: Избираме първите 10 от 30 души по C_{30}^{10} начина, редът няма значение. Остават 20 души и от тях избираме 10 по C_{20}^{10} начина. Остават 10 души, които можем да изберем по само 1 начин $\left(C_{10}^{10}=1\right)$ Така получаваме $C_{30}^{10}.C_{20}^{10}.1$ на брой избора на 3 групи по 10, но при това ще има повторения на групите.

По условие групите нямат номера, следователно са равнопоставени, т.е. за тях редът няма значение. Броят на **ПОВТОРЕНИЯТА на 3 елемента** /в случая групи/ е P_3 и за да изключим тези повторения, трябва да разделим на $P_3 \Rightarrow \frac{C_{30}^{10}.C_{20}^{10}.1}{P_3}=\frac{1}{P_3}.C_{30}^{10}.C_{20}^{10}=\frac{1}{3!}.\frac{30!}{\cancel{20!}.10!}.\frac{\cancel{20!}}{10!.10!}=$

$$=\frac{\cancel{10!}.11.12.13.\cancel{14}.\cancel{15}.16.17.18.19.20.21.22.23.\cancel{24}.25.....30}{3!.\cancel{10!}.10!.1.\cancel{2}.\cancel{3}.\cancel{4}.\cancel{5}.\cancel{6}.\cancel{7}.8.9.10}=$$

$$=\frac{11.12.13.\cancel{16}.17.\cancel{18}.19.\cancel{20}.21.22.23.25.26.27.\cancel{28}.29.\cancel{30}}{1.\cancel{2}.\cancel{3}.1.\cancel{2}.\cancel{3}.\cancel{4}.5.\cancel{6}.\cancel{7}.\cancel{8}.9.\cancel{10}.8.9.\cancel{10}}=$$

$$=\frac{11.12.13.17.19.21.22.23.5.26.27.29}{9.8.9}=$$

$$=11.13.17.19.21.11.23.5.26.29=969969.953810=925166131890$$

30) ! По колко различни начина може да се разпределят 12 различни предмета между три лица A, B, C, така че всяко от тях да получи по 4 предмета?

Решение: Избираме за A – 4 предмета от 12 по C_{12}^{4} начина. Остават 8 предмета. Избираме за B – 4 предмета от 8 по C_{8}^{4} начина. За C остават 4 предмета по 1 начин $\left(C_{4}^{4}=1\right)$. Хората са различни, затова редът на групите от 4 предмета има значение и няма да делим на повторенията.

$$\Rightarrow C_{12}^{4}.C_{8}^{4}=\frac{12!}{\cancel{8!}.4!}.\frac{\cancel{8!}}{4!.4!}=\frac{\cancel{12}.11.10.9.\cancel{8}.7.\cancel{6}.5.\cancel{4!}}{\cancel{4!}.\cancel{4.3}.\cancel{2.4}.\cancel{3.2}}=11.10.9.7.5=34650$$

31) ! По колко различни начина една колода от 36 карти може да се раздели на две половини, така че във всяка половина да има по две аса?

Решение: Като махнем асата, остават 32 карти, половината от тях е 16. Избираме 16 от 32 карти като мястото няма значение по C_{32}^{16} начина. Две от четирите аса избираме по C_{4}^{2} начина.
$\Rightarrow C_{32}^{16}.C_{4}^{2}$.

32) ! Учениците от един клас изучават 9 различни предмета. По колко начина може да се състави учебна програма за един учебен ден от 5 различни учебни часа, в който да се изучават 5 различни учебни предмета, при условие, че история и география не може да се изучават в един ден.

Решение: Като махнем географията остават 8 предмета, от които да подредим 5 часа, а това става по V_{8}^{5} начина. Това включва и всички подредби, в които няма нито история, нито география.

Махаме географията. Ако имаме първи час история, останалите 4 часа можем да подредим по V_{7}^{4} начина. Аналогично, ако история е втори, трети, четвърти или пети час. Така за избор на часа по история имаме 5 възможности, а за останалите четири часа – $V_{7}^{4} \Rightarrow 5.V_{7}^{4}$ възможности да включим история в програмата.

$$\Rightarrow V_8^5 + 5V_7^4 = \frac{8!}{3!} + 5.\frac{7!}{3!} = \frac{3!.4.5.6.7.8 + 5.3!.4.5.6.7}{3!} = 4.5.6.7(8+5) = 120.7.13 = 10920$$

33) В турнир по хандбал участват 8 отбора. Ако има безспорен фаворит за златния медал, то по колко различни начина могат да се разпределят златния, сребърния и бронзовия медали в турнира?

<u>Решение:</u> Без фаворита остават 2 различни медала за разпределяне измежду 7 отбора.

$$\Rightarrow V_7^2 = \frac{7!}{(7-2)!} = \frac{5!.6.7}{5!} = 6.7 = 42$$

34) ! На рафт са подредени събрани съчинения в 30 тома. По колко начина могат да се подредят така, че трети и четвърти том да не стоят един до друг?

<u>Решение:</u> Всички подреждания на 30 тома са 30!. От тях трябва да извадим тези, в които двата тома са един до друг.

Ако броим двата тома за 1 обект, получаваме 29 обекта, които можем да подредим по 29! начина, но двата тома могат да си разменят местата. $\Rightarrow 2.29!$ начина да подредим 30-те тома, като трети и четвърти са един до друг.

$$\Rightarrow 30! - 2.29! = 29!.30 - 2.29! = 29!(30-2) = 29!.28$$

35) Пет момчета и три момичета трябва да се подредят в два реда за снимка, като момчетата са прави, а момичетата са седнали пред тях. По колко различни начина могат да се подредят?

<u>Решение:</u> Подреждането на момичетата $\left(P_3\right)$ не зависи от подреждането на момчетата $\left(P_5\right)$.

$$\Rightarrow P_5.P_3 = 5!.3! = 5.4.3.2.1.3.2.1 = 720$$

36) Броят на различните начини, по които могат да се подредят в редица (за снимка) Иван и четиримата му приятели, така, че Иван да е винаги в средата е:

<u>Решение:</u> 1 2 И 3 4 $\rightarrow P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$

37) В олимпиадата по математика участват отбори от по трима души. Ако отборът се прави измежду шест ученици, какъв е броят на възможнните отбори?

<u>Решение:</u> $C_6^3 = \dfrac{6!}{3!.3!} = \dfrac{3!.4.5.6}{3!.3.2.1} = 4.5 = 20$

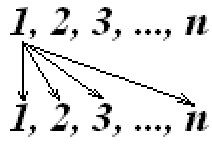
38) Колко вида знамена могат да се направят чрез различно подреждане на три ленти плат (бяла, зелена и червена) хоризонтално една под друга?

<u>Решение:</u>

$$\left.\begin{matrix} БЗЧ \\ БЧЗ \\ ЗБЧ \\ ЗЧБ \\ ЧЗБ \\ ЧБЗ \end{matrix}\right) 6 \quad ВЪЗМОЖНОСТИ \rightarrow P_3 = 3! = 3.2.1 = 6$$

39) В една зала за танци има *n* момчета и *n* момичета. По колко начина те могат да образуват танцови двойки?

<u>Решение:</u> Всяко момиче може да бъде поканено от всяко момче, нека момичетата не сменят местата си $\Rightarrow$ броят на двойките е равен на броя на подрежданията в множеството на момчетата, т.е. $P_n = n!$



Или: първото момче има избор от *n* момичета, второто – от (*n* – 1) момичета, ... *n*-тото момче има избор от 1 момиче, а това са *n*! възможности.

40) Колко двуцифрени числа могат да се напишат с цифрите 1, 2, 3, и 4 без повтаряне на цифрите?

Решение:

$$\left.\begin{array}{cccc} 12 & 21 & 31 & 41 \\ 13 & 23 & 32 & 42 \\ 14 & 24 & 34 & 43 \end{array}\right) \Rightarrow V_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4.3.2.1}{2.1} = 12$$

41) ! Телефонен номер се състои от 5 различни цифри. Колко са възможностите за останалите три цифри, ако номерът започва с 25?

Решение: Всичките цифри са 10 $\rightarrow$ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Изоставям 2 и 5 $\Rightarrow$ остават 8 цифри $\Rightarrow$ с тези 8 цифри ще имаме вариации от 3-ти клас (за останалите 3 цифри)

$$V_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{5!.6.7.8}{5!} = 8.7.6 = 336$$

42) Колко трицифрени числа могат да се съставят с цифрите 3, 0, 4 и 7, така че да не се повтаря никоя от тях?

Решение: V_4^3 – броят на всички възможни вариации, V_3^2 – броят на вариациите на числата, започващи с 0

$$\Rightarrow V_4^3 - V_3^2 = \frac{4!}{(4-3)!} - \frac{3!}{(3-2)!} = 4! - 3! = 4.3.2.1 - 3.2.1 = 24 - 6 = 18$$

43) Да се намери броят на диагоналите в изпъкнал 12-ъгълник?

Решение: През 2 точки минава само една права $\Rightarrow C_{12}^2 = \frac{12!}{(12-2)!.2!} = \frac{10!.11.12}{10!.2} = 66$

В тези 66 прави са включени и правите,минаващи през два съседни върха (т.е.страните) $\Rightarrow$ да извадим броя на страните $\Rightarrow 66 - 12 = 54$ диагонала.

44) ! В партида от 18 детайла 4 са нестандартни. По колко начина могат да се вземат случайно 5 детайла, от които 2 са нестандартни?

Решение: 18 детайла = 4 нестандартни +14 стандартни

C_4^2 – начина да се вземат от 4 нестанд. 2 нестанд.

Броят на взетите детайли е 5 = 2 нестанд. + 3 стандартни

$\Rightarrow$ за всеки от C_4^2 (начина за вземане на нестанд.) съответстват C_{14}^3 (начина за вземане на стандартни) $\Rightarrow C_4^2 C_{14}^3 = \frac{4!}{(4-2)!.2!} . \frac{14!}{(14-3)!.3!} = \frac{4.3.2.1}{2!.2.1} . \frac{11!.12.13.14}{11!.3.2.1} = 6.26.14 = 2184$

45) В партида има 5 изделия за 1-во качество и 10 изделия от 2-ро качество. По колко начина могат случайно да се вземат 3 изделия, така че:

(а) трите да са от 1-во качество;
(б) трите да са от 2-ро качество;
(в) двете да са от 1-во к-во, а едното от 2-ро;
(г) двете да са от 2-ро, а едното от 1-во.

(а) $C_5^3 = \frac{5!}{2!.3!} = \frac{3!.4.5}{2.3!} = 10$

(б) $C_{10}^3 = \frac{10!}{7!.3!} = \frac{7!.8.9.10}{7!.3.2.1} = 120$

(в) $C_5^2 C_{10}^1 = \frac{5!}{3!.2!} . \frac{10!}{9!.1!} = \frac{3!.4.5}{3!.2.1} . \frac{9!.10}{9!.1} = 10.10 = 100$

(г) $C_5^1 C_{10}^2 = \frac{5!}{4!.1!} . \frac{10!}{8!.2!} = \frac{4!.5}{4!} . \frac{8!.9.10}{8!.2} = 5.45 = 225$

46) В един клас има 15 момчета и 20 момичета. Намерете по колко различни начина може да се състави представителна група от 2 момчета и 3 момичета.

Решение: $C_{15}^2.C_{20}^3=\frac{15!}{(15-2)!.2!}.\frac{20!}{(20-3)!.3!}=\frac{13!.14.15}{13!.2}.\frac{17!.18.19.20}{17!.3.2.1}=105.1140=119700$

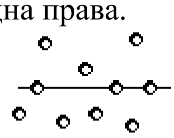
47) По колко различни начина могат да бъдат назначени 2 чистачки и 3 машинописки, ако кандидатите за чистачки са 9, а за машинописки −14.

Решение: $C_9^2.C_{14}^3=\frac{9!}{7!.2!}.\frac{14!}{11!.3!}=\frac{7!.8.9}{7!.2}.\frac{11!.12.13.14}{11!.3.2.1}=36.364=13104$

48) ! Колко прави могат да се прекарат:

а) през 8 точки, никои 3 от които не лежат на една права;

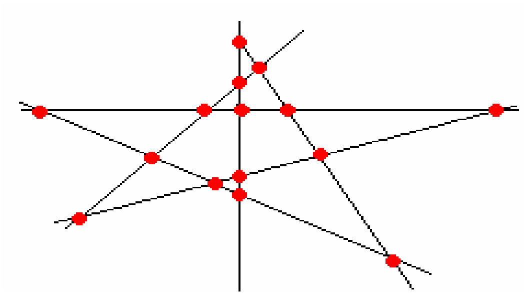
б) през 10 точки, 3 от които лежат на една права.



Решение: а) $C_8^2=\frac{8!}{6!.2!}=\frac{6!.7.8}{6!.2}=28$; б) От правите през 10 точки трябва да извадим трите прави, минаващи през 3 точки и вместо тях да прибавим 1 права – на която лежат трите точки: $C_{10}^2-C_3^2+1=C_{10}^2-3+1=\frac{10!}{8!.2!}-2=\frac{8!.9.10}{8!.2}-2=45-2=43$.

49) В колко точки се пресичат 6 прави, които лежат в една равнина, но не минават през една и съща точка и никои 2 от тях не са успоредни?

Решение: $C_6^2=\frac{6!}{4!.2!}=\frac{4!.5.6}{4!.2!}=15$



50) ! През колко точки, никои три от които не лежат на една права, могат да се прекарат:

а) 28 прави; б) 55 прави.

Решение: а) $C_n^2=28\to\frac{n!}{(n-2)!2!}=28\to\frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}.2}=28$

$n^2-n-56=0\to n_{12}=\frac{1\pm 15}{2}\begin{matrix}\to n=8\\ \to n=-7<0\end{matrix}$ $\Rightarrow$ Отг. 8 точки.

б) $C_n^2=55\to\frac{n1}{(n-2)!2!}=55\to\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!2}=55\to n^2-n-110=0$

$n_{12}=\frac{1\pm 21}{2}\begin{matrix}\to -10<0\ \textit{не е реш.}\\ \to 11\end{matrix}$ $\Rightarrow$ Отг. 11 точки.

51) Колко окръжности са определени от 7 точки, ако никои 4 точки не лежат на една окръжност и никои три от тях не лежат на една и съща права?

Решение: (Три точки определят една окръжност, ако не лежат на една права.)

$C_7^3=\frac{7!}{(7-3)!3!}=\frac{4!5.6.7}{4!.3.2.1}=35$

52) Колко диагонала има един правилен 15-ъгълник?

Решение: През две точки минава една права $\to C_{15}^2=\frac{15!}{13!2!}=\frac{15.14.\cancel{13!}}{\cancel{13!}2}=105$ – всички прави през 15 точки $\Rightarrow$ трябва да извадим броя на страните $\Rightarrow$ 105 -15 = 90 диагонала.

53) Колко тетраедъра могат да се построят от 7 точки, лежащи върху една сфера, ако никои 4 от тях не лежат в една равнина ?

Решение: Тетраедърът има 4 върха, които не лежат в една равнина.

$\Rightarrow C_7^4=\frac{7!}{(7-4)!4!}=\frac{4!5.6.7}{3!4!}=\frac{5.6.7}{2.3.1}=35$

54) Колко равнини са определени от 6 точки, ако никои 3 от тях не лежат на една и съща права и никои 4 точки не лежат в една и съща равнина?

Решение: $C_6^3=\dfrac{6!}{3!3!}=\dfrac{3!4.5.6}{3!3.2.1}=20$

55) В колко точки се пресичат 5 прави, които лежат в една равнина, ако никои три прави не минават през една и съща точка и две от тях са успоредни помежду си?

Решение: В C_5^2 се пресичат 5 прави, ако всеки две се пресичат в различна точка. Двете успоредни прави не се пресичат и изваждаме 1 точка. $\Rightarrow C_5^2-1=\dfrac{5!}{3!2!}-1=\dfrac{3!4.5}{3!2.1}-1=10-1=9$

56) Колко различни дроби могат да се съставят от дължините *a ,b, c, d* на 4 отсечки, ако числата *a*, *b*, *c*, *d* смятаме за цели и взаимнопрости?

Решение: $V_4^2=\dfrac{4!}{2!}=\dfrac{2!3.4}{2!}=12$

57) Определете броя на различните изрази от вида $ax+b$ $(a\neq b)$, ако a, b приемат различни стойности от множеството от числа $\{-3;-1;0;1;2\}$.

Решение: $V_5^2=\dfrac{5!}{3!}=\dfrac{3!4.5}{3!}=20$

58) Учениците от един клас, които били 25 души, получили 3 безплатни покани за театър, за концерт и за спортно състезание. По колко начина могат да бъдат разпределени поканите, ако всеки ученик може да получи най-много 1 покана?

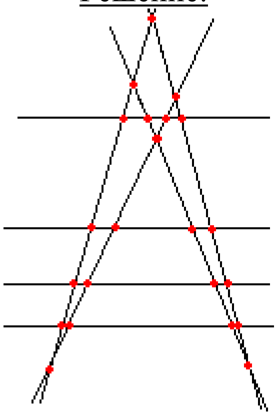
Решение: $V_{25}^3=\dfrac{25!}{(25-3)!}=\dfrac{22!23.24.25}{22!}=13800$

59) В компютърна зала на един ред има 10 места. По колко различни начина на тези места могат да се настанят 5 ученици?

Решение: $V_{10}^5=\dfrac{10!}{5!}=\dfrac{5!6.7.8.9.10}{5!}=30240$

60) * В колко точки се пресичат 8 прави в една равнина, 4 от които са успоредни и никои три не минават през една точка ?

Решение:



Ако 8 прави се пресичат в различни точки – това са C_8^2 точки. Но имаме 4 успоредни прави, които не се пресичат помежду си.

$\Rightarrow$ преброили сме с C_4^2 точки повече /4 пресичащи се прави имат C_4^2 общи точки, ако никои три не се пресичат в 1 точка/

$$\Rightarrow C_8^2-C_4^2=\frac{8!}{6!2!}-\frac{4!}{2!2!}=\frac{6!7.8}{6!2}-\frac{2!3.4}{2!.2}=28-6=22$$

61) ! В колко точки се пресичат 12 прави, никои две от които не са успоредни, но 4 от тях минават през една точка ?

Решение: Четирите прави биха се пресекли в C_4^2 точки, които сме преброили с C_{12}^2. Вместо това те се пресичат в 1 точка. $C_{12}^2-C_4^2+1=\dfrac{12!}{10!2!}-\dfrac{4!}{2!2!}+1=\dfrac{\cancel{10!}.11.12}{\cancel{10!}.2}-\dfrac{\cancel{2!}3.4}{\cancel{2!}2}+1=66-6+1=61$

62) Колко е броят на трицифрените числа които могат да се запишат с цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 (девет цифри) без да се повтарят?

Решение: $V_9^3=\dfrac{9!}{6!}=\dfrac{6!7.8.9}{6!}=504$

63) Колко е броят на трицифрените числа, които могат да се запишат с цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, на които първата цифра е 6?

Решение: $V_8^2=\frac{8!}{6!}=\frac{6!7.8}{6!}=56$

64) По колко начина може да се състави списък на 10 души?

Решение: $P_{10}=10!=1.2.3.4.5.6.7.8.9.10=3628800$

65) Тридесет ученика си разменили снимки за спомен. Колко снимки са били раздадени?

Решение: $2.C_{30}^2=2.\frac{30!}{28!.2!}=\cancel{2}.\frac{\cancel{28}!29.30}{\cancel{28}!.\cancel{2}}=870$

66) Четири различни награди трябва да се разпределят между четрима победители в един конкурс. По колко начина може да стане това?

Решение: $P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$

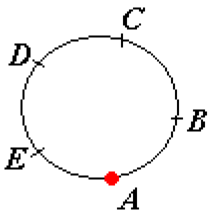
67) Колко различни комплекти от един молив и две химикалки могат да си съставят от 10 различни молива и 12 различни химикалки ?

Решение: $C_{10}^1.C_{12}^2=\frac{10!}{9!1!}.\frac{12!}{10!2!}=\frac{\cancel{9}!10}{\cancel{9}!}.\frac{\cancel{10}!11.12}{\cancel{10}!.2}=10.66=660$

68) Колко е броят на различните подреждания на 5 рзлични перли върху окръжност?

Решение: $P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$

Една от перлите ще е специална – спрямо нея ще се нареждат останалите.



69) В състезание по математика участват 8 отбора. Но първо, второ и трето място може да се класира само по един отбор. На колко е равен броят на различните начини, по които тези отбори може да се класират на първо, второ и трето място?

Решение: $V_8^3=\frac{8!}{5!}=\frac{5!6.7.8}{5!}=6.7.8=336$

70) ! Урна съдържа 8 бели и 4 черни топки. По случаен начин се избират едновременно 2 топки. Да се намери вероятността двете топки да са бели.

Решение: Топките общо са 12. Всички възможни комбинации да извадим 2 топки от 12 са C_{12}^2.

Белите топки са 8. Възможните комбинации да извадим 2 бели топки от 6 е C_8^2.

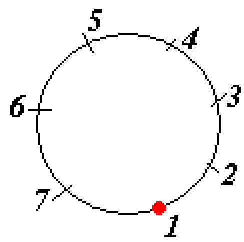
Вероятността да се случи благоприятно събитие е броят на благоприятните възможности /събития/, разделен на броя на всички възможности /събития/.

$$\Rightarrow P=\frac{C_8^2}{C_{12}^2}=\frac{\frac{8!}{6!.2!}}{\frac{12!}{10!.2!}}=\frac{\cancel{6}!.7.8}{\cancel{6}!.2}.\frac{\cancel{10}!2}{\cancel{10}!.11.12}=28.\frac{1}{66}=\frac{14}{33}$$

71) По колко различни начина могат да седнат 7 човека около кръгла маса?

Решение: $P_6=6!=6.5.4.3.2.1=36.20=720$

Един от тях може да седне където иска, местата на останалите ще са спрямо него.



72) Дадени са 5 отсечки с дължини 1, 4, 5, 7, 8. Каква е вероятността три случайно избрани да са страни на триъгълник?

Решение: Всички възможности са: $C_5^3=\frac{5!}{2!3!}=\frac{\cancel{3}!4.5}{2.\cancel{3}!}=10$

Благоприятните възможности са 4: $\begin{matrix} 4 & 5 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \\ 4 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 8 \end{matrix}$

А вероятността да се случи благоприятно събитие е броят на благоприятните възможности /събития/, разделен на броя на всички възможности /събития/.

$\Rightarrow P = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

73) ! Ученик номерира пет DVD диска с числата 1, 2, 3, 4 и 5 и по случаен ред ги поставя в кутия. Да се намери вероятността дисковете №1 и №2 да са един до друг и в растящ ред отгоре надолу в кутията.

Решение: Всички възможни подредби са $P_5 = 5!$.

За диск №1 и №2 на има възможни 4 позиции – $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \times \\ \times \\ \times \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \times \\ 1 \\ 2 \\ \times \\ \times \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \times \\ \times \\ 1 \\ 2 \\ \times \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3! = 3.2 = 6 са възможностите за останалите три диска за всяка една от 4-те позиции.
Диск №1 и №2 да са един до друг при даденото условие е 4.3! на брой, т.е.

$P_4 = 4! = 4.3.2 = 24$ са благоприятните случаи. /Можем дисковете №1 и №2 да броим за 1 обект и така ще имаме подреждане на 4 обекта на 4 места./

$\Rightarrow$ търсената вероятност е $P = \frac{4.3!}{5!} = \frac{4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}.4.5} = \frac{1}{5}$

74) ! На библиотечен рафт по случаен начин са поставени 30 тома на Леонард Ойлер. Вероятността том 1 и том 2 да са един до друг е ...

Решение: $P_{30} = 30!$ са всички възможни подредби

(1 том, 2 том), ... – 29 възможни позиции /ако том 1 и том 2 броим за 1 обект/ и за всяка от тях $P_{28} = 28!$ са възможностите за останалите томове, но том 1 и том 2 могат да разменят местата си $\Rightarrow$ 2.29.28! са благоприятните възможности том 1 и 2 да са един до друг

Или: ако броим том1 и том 2 за 1 обект, получаваме 29 обекра, които можем да подредим по $P_{29} = 29!$ начина. Понеже в двойката (том 1, том 2) могат да си сменят местата, то получаваме $2.P_{29} = 2.29!$ благоприятни начина за подреждане.

$\Rightarrow$ търсената вероятност е $P = \frac{2.29.28!}{30!} = \frac{2.29.28!}{28!29.30} = \frac{1}{15}$

75) В кутия има 14 еднакви молива, от които 6 са с твърдост “H” и 8 молива са с твърдост “HB”. По случаен начин се изваждат 3 молива. Да се намери вероятността и трите молива да са с твърдост “H”.

Решение: 6 молива “H” $\Rightarrow C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{3!4.5.6}{3!3.2} = 20$ начина да се изберат 3 молива “H”

$C_{14}^3 = \frac{14!}{11!3!} = \frac{11!12.13.14}{11!3.2} = 26.14$ са всички възможни избора на 3 молива

$\Rightarrow$ търсената вероятност е $P = \frac{20}{26.14} = \frac{5}{13.7} = \frac{5}{91}$

76) По колко начина могат да се разпределят 6 различни предмета между трима ученици така, че всеки да получи по два предмета?

Решение: $3.V_6^2 = 3.\frac{6!}{4!} = 3.\frac{\cancel{4!}5.6}{\cancel{4!}} = 90$

77) При набиране на телефонен номер ученик установява, че е забравил последните две цифри на номера, но помни, че те са различни, и ги набира по случаен начин. Каква е вероятността желаният номер да бъде избран при първо набиране?

Решение: Всички цифри са 10, 2 цифри е забравил $\Rightarrow V_{10}^{2}=\frac{10!}{8!}=\frac{\cancel{8!}.9.10}{\cancel{8!}}=90$. Само 1 е вярната двойка. Търсената вероятност е $\frac{1}{90}$.

78) Компютър по случаен начин изписва на екрана трицифрено число. Да се намери вероятността всички цифри на числото да са равни.

Решение: Трицифрените числа са 100, ..., 999 – 900 на брой

Трицифрени числа с равни цифри са 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999 – 9 на брой

$\Rightarrow$ търсената вероятност е $P=\frac{9}{900}=\frac{1}{100}$.

79) За изпит са предложени комплект от 20 въпроса и 20 задачи. От тях се съставят изпитни билети, като всеки билет съдържа 3 въпроса и 2 задачи. Колко различни изпитни билета могат да се съставят?

Решение: $C_{20}^{2}.C_{20}^{3}=\frac{20!}{18!2!}.\frac{20!}{17!3!}=\frac{\cancel{18!}19.20}{\cancel{18!}2}.\frac{\cancel{17!}18.19.20}{\cancel{17!}.3.2}=190.19.60=216600$

80) ! От урна, в която 15 червени, 10 сини и 5 бели топки, по случаен начин се изважда една топка. Каква е вероятността извадената топка да <u>не</u> е бяла?

Решение:

I начин: Вероятността да бъде изтеглена бяла е $\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$

$\Rightarrow$ Вероятността да <u>не</u> е бяла е $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

II начин: Вероятността да бъде изтеглена червена е $\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$. Вероятността да бъде изтеглена синя е $\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ Вероятността топката да не е бяла е $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$.

III начин: Всички топки са 30, а небелите са 25 $\Rightarrow$ Вероятността топката да не е бяла е $\frac{25}{30}=\frac{5}{6}$.

81) Да се намери броят на всички четирицифрени числа, които съдържат цифрите 1, 2, 3 и 4 точно по един път.

Решение: $P_4=4!=4.3.2=24$

82) В един клас има 16 момчета и 14 момичета. Осем билета за театър се разпределят в класа по равно – 4 билета за момчета и 4 за момичета. По колко начина могат да се разпределят билетите?

Решение: $C_{16}^{4}.C_{14}^{4}=\frac{16!}{12!4!}.\frac{14!}{10!4!}=\frac{\cancel{12!}.13.14.15.16}{\cancel{12!}.4.3.2}.\frac{\cancel{10!}.11.12.13.14}{\cancel{10!}.4.3.2}=13.140.77.13=1821820$

83) ! В един магазин 6% от наличните 50 чаши имат скрит дефект. Да се намери вероятността да купим 6 чаши, всяка от които е без дефект.

Решение: 6% от 50 = $\frac{6}{100}.50$ = 3 чаши са дефектни $\Rightarrow$ 47 чаши са качествени.

$C_{47}^{6}=\frac{47!}{41!6!}=\frac{\cancel{41!}42.43.44.45.46.47}{\cancel{41!}6.5.4.3.2}=43.77.69.47$ - начина за избор на 6 качествени чаши.

$C_{50}^{6}=\frac{50!}{44!6!}=\frac{\cancel{44!}45.46.47.48.49.50}{\cancel{44!}6.5.4.3.2}=15.46.47.49.10$ - начина за избор на произволни 6 чаши.

$\Rightarrow$ търсената вероятност е $P=\frac{C_{47}^{6}}{C_{50}^{6}}=\frac{43.\cancel{47}.77.69}{15.46.\cancel{47}.49.10}=\frac{43.11}{700}=\frac{473}{700}$

84) ! В кутия има 10 бели и 5 черни топки. По случаен начин се изваждат 5 от тях. Да се намери вероятността 2 от тях да са бели и 3 черни.

Решение: $C_{10}^{2}=\frac{10!}{8!2!}=\frac{\cancel{8}!9.10}{\cancel{8}!2}=45$ начина да можем да изберем 2 от 10 бели топки

$C_{5}^{3}=\frac{5!}{2!3!}=\frac{\cancel{3}!4.5}{2.\cancel{3}!}=10$ начина да изберем 3 от 5 черни

$\Rightarrow$ От 15-те топки можем да изберем точно 2 бели и 3 черни по $C_{10}^{2}.C_{5}^{3}=45.10$ начина

$C_{15}^{5}=\frac{15!}{10!5!}=\frac{\cancel{10}!11.12.13.14.\cancel{15}}{\cancel{10}!\cancel{5}.4.\cancel{3}.2}=33.91=3003$ начина да изберем произволни 5 от 15 топки.

$\Rightarrow$ Търсената вероятност е $P=\frac{C_{10}^{2}.C_{5}^{3}}{C_{15}^{5}}=\frac{45.10}{3003}=\frac{150}{1001}$

85) ! В урна има 10 червени и 5 бели топки. По случаен начин се изтеглят 3 топки. Каква е вероятността поне две от тях да са червени?

Решение: Поне две от три топки да са червени $\equiv$ или 2, или 3 да са червени.

$P_{1}=\frac{C_{10}^{2}.C_{5}^{1}}{C_{15}^{3}}=\frac{45}{91}$ е вероятността две топки да са червени

$P_{2}=\frac{C_{10}^{3}}{C_{15}^{3}}=\frac{24}{91}$ е вероятността три да са червени

Търсената вероятност е: $P=P_{1}+P_{2}=\frac{45}{91}+\frac{24}{91}=\frac{69}{91}$

86) Броят на диагоналите на правилен десетоъгълник е:

Решение: C_{10}^{2} - Всички прави през 2 върха, 10 – страните

$C_{10}^{2}-10=\frac{10!}{8!2!}-10=45-10=35$ диагонала.

87) Във финала на състезание по скок на височина участват 8 атлети. По колко различни начина могат да бъдат разпределени медалите?

Решение: $V_{8}^{3}=\frac{8!}{5!}=336$

88) ! Дадени са две кутии с тетрадки. Първата кутия съдържа 5 тетрадки със синя корица, а втората съдържа 5 тетрадки със зелена корица. Тетрадките във всяка кутия са номерирани последователно с етикети с цифрите 1, 2, 3, 4, 5. Ученик по случаен начин взема по една тетрадка от всяка кутия. Да се намери вероятността ученикът да си избере от кутиите тетрадки с еднакви номера.

Решение: Нека от първата кутия извадим която и да е тетрадка, например №3. Вероятността от втората кутия да извадим №3 е $\frac{1}{5}$.

89) Четири различни награди трябва да се разпределят между четирима победители в един конкурс. По колко начина може да стане това?

Решение: $P_{4}=4!=4.3.2.1=24$

90) От 20 войници и 3 офицери се избира патрул от 3 войници и 1 офицер. Колко различни патрули могат да се съставят?

Решение: $C_{20}^{3}.C_{3}^{1}=\frac{20!}{17!3!}.\frac{3!}{2!1!}=\frac{17!18.19.20}{17!}.\frac{1}{2}=18.19.10=3420$

91) Разполагаме с 12 книги, две от които са от един автор, а останалите – от различни. По колко начина можем да ги подредим на един рафт така, че книгите от един автор да са една до друга?

Решение: $2.P_{11}=2.11!$

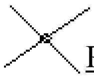
92) От 10 математици и 5 физици се съставя комисия от 7 членове. Каква е вероятността комисията да е съставена само от математици?

Решение: 10+5=15 учени

C_{15}^7 - брой на всички възможни комисии
C_{10}^7 благоприятни случаи (само математ.) $\Rightarrow$

$$P=\frac{C_{10}^7}{C_{15}^7}=\frac{\frac{10!}{3!7!}}{\frac{15!}{8!7!}}=\frac{10!}{3!\cancel{7!}}.\frac{8!\cancel{7!}}{15!}=\frac{\cancel{10!}\,\cancel{3!}4.5.6.7.8}{\cancel{3!}\,\cancel{10!}11.12.13.14.15}=\frac{6.7.8}{11.9.13.14}=\frac{8}{33.13}=\frac{8}{429}$$

93) В колко точки се пресичат 16 прави в една равнина, ако точно две от тях са успоредни и никои три прави не минват през една точка?



Решение: $C_{16}^2-1=\frac{16!}{14!2!}-1=\frac{\cancel{14!}15.16}{\cancel{14!}2}-1=15.8-1=120-1=119$

94) ! Кодът на сейф се състои от три цифри. Крадец имал сведение, че трите цифри са различни и една от тях е 6. Каква е вероятността той да отвори сейфа от първи опит?

Решение: Всички цифри са 10, крадецът знае една $\Rightarrow$ остават 9

C_9^2 - са възможностите за две от 9-те цифри
P_3 -начина, по които е съставена тройка цифри $\Rightarrow C_9^2.P_3$ – брой на всички възможни проби

$$\Rightarrow P=\frac{1}{C_9^2.P_3}=\frac{1}{\frac{9!}{7!2!}.3!}=\frac{\cancel{7!}2}{\cancel{7!}8.9.2.3}=\frac{1}{216}$$

Или: броят на възможните проби може да се сметне като V_9^2 –възможните избори на 2 от 9 цифри, като има значение мястото им, умножаваме по 3, защото цифрата „6” може да е на първо, второ или трето място $\Rightarrow 2.V_9^2=216$.

95) Сладкарница предлага 12 вида сладолед, един от които е ягодов. Поръчах си прорция с три топки, всяка от различен вид. Вероятността в порцията ми да има ягодов сладолед е...

Решение: $C_{12}^3=\frac{12!}{9!3!}=\frac{9!10.11.12}{9!.3.2}=220-$ брой на всички възможни порции с 3 топки от различен сладолед

$C_{11}^2=\frac{11!}{9!}=\frac{9!10.11}{9!2}=55-$ брой на порциите с една топка ягодов сладолед и две топки друг вид

$\Rightarrow P=\frac{55}{220}=\frac{1}{4}$ е търсената вероятност.

96) Двадесет ученици от 12^a клас учат английски език, а останалите пет – немски език. За участие в международна среща трябва да се изберат 6 ученика от 12^a клас, трима от които учат немски език. По колко начина може да стане това?

C_5^3 – начина да се изберат 3-ма от 5 уч. (нем.)
C_{20}^3 – начина да се изберат 3-ма от 20 уч. (анг.) общо 6 уч.

$$C_5^3.C_{20}^3=\frac{5!}{2!3!}.\frac{20!}{17!3!}=\frac{3!4.5}{2.3!}.\frac{\cancel{17!}.18.19.20}{\cancel{17!}.3.2}=10.3.19.20=11400 \text{ начина}$$

97) В състезание по математика могат да участват отбори, състоящи се от двама, трима или четрима ученика. Колко различни отбори могат да се съставят от 8 ученика?

C_8^2 – брой на отборите с двама уч. от 8
C_8^3 – брой на отборите с трима уч. от 8
C_8^4 – брой на отборите с четирима уч. от 8

$C_8^2+C_8^3+C_8^4$ - брой на всички отбори

$$C_8^2+C_8^3+C_8^4=\frac{8!}{6!2!}+\frac{8!}{5!3!}+\frac{8!}{4!4!}=\frac{6!7.8}{6!2}+\frac{5!6.7.8}{5!3.2}+\frac{4!5.6.7.8}{4!4.3.2}=28+56+70=154$$

98) ! В урна има 10 жетона, които са номерирани с числата от 1 до 10. От урната се вадят три жетона. Каква е вероятността сборът на трите номера да е 10?

Решение: $C_{10}^3 = \frac{10!}{7!3!} = \frac{7!.8.9.10}{7!.3.2} = 120$ са всички възможности. Сборът на трите номера е 10, ако

са изтеглени жетони с номера: $\begin{matrix} 1, & 2 & и & 7 \\ 1, & 3 & и & 6 \\ 1, & 4 & и & 5 \\ 2, & 3 & и & 5 \end{matrix}$

$\Rightarrow$ благоприятните възможности са 4 $\Rightarrow P = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$

99) Изпъкнал многоъгълник има 44 диагонала. Колко е броят на страните му?

Решение: Разглеждаме n-ъгълник.

$C_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{(n-2)!(n-1).n}{(n-2)!2} = \frac{(n-1).n}{2}$ - брой на всички отсечки с n на брой върхове

$C_n^2 - n = \frac{(n-1)n}{2} - n$ - от всички отсечки изваждаме броя на страните, за да получим броя на диагоналите

$\Rightarrow \frac{(n-1)n}{2} - n = \frac{n^2-n-2n}{2} = \frac{n^2-3n}{2}$ диагонала

$\Rightarrow \frac{n^2-3n}{2} = 44 \to n^2-3n-88=0 \to n_{12} = \frac{3\pm 19}{2},\ n_1 = 11,\ n_2 = -8 < 0 \Rightarrow$ Отг. 11

100) В една кутия има 15 червени и 12 зелени топки. Каква е вероятността три случайно извадени топки да се окажат червени?

Решение: 15черв. + 12зел. = 27топки

C_{27}^3 – брой на всички възможни тройки, C_{15}^3 – брой на тройки с 3 червени топки

$$P = \frac{C_{15}^3}{C_{27}^3} = \frac{\frac{15!}{12!3!}}{\frac{27!}{24!3!}} = \frac{15!}{12!3!}.\frac{24!3!}{27!} = \frac{12!.13.14.15}{12!}.\frac{24!}{24!.25.26.27} = \frac{13.14.15}{25.26.27} = \frac{7}{45}$$

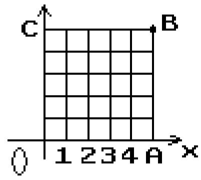
101) Колко четирицифрени числа с различни цифри могат да се напишат с цифрите 1, 2, 3,4 и 0?

Решение: V_5^4 – брой на всички 4-цифрени числа, написани с 5 цифри

С “0” не може да започва число $\Rightarrow V_4^3$ брой на всички 4-цифрени, започващи с 0

$V_5^4 - V_4^3 = \frac{5!}{(5-4)!} - \frac{4!}{(4-3)!} = 5! - 4! = 4!(5-1) = 4.3.2.1.4 = 96$

102) * В правоъгълната координатна система е изобразен квадрат OABC със страна, равна на 5м.ед. Избрани са две точки с координати цели числа от вътрешността на квадрата. Каква е вероятността точките да имат равни абсциси?



Решение: 4.4 = 16 точки с цели координати има във вътрешността на квадрата.

$C_{16}^2 = \frac{16!}{14!2!} = 120$ двойки измежду 16 точки.

В колко двойки точките имат равни абсциси? Ако абсцисата е 1, възможните ординати са 4 на брой, от там и точките са 4. От тях избираме 2 двойки по C_4^2 начина.

$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$ двойки точки с абсциса $x = 1$
6 двойки точки с абсциса $x = 2$
6 двойки точки с абсциса $x = 3$
6 двойки точки с абсциса $x = 4$

$\Bigg\}$ 6.4 = 24 двойки точки с равни абсциси, т.е. 24 са благоприятните възможности

$\Rightarrow P = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$